



Grammaires formelles : Forme normale de Chomsky

Karën Fort

karen.fort@sorbonne-universite.fr / <https://www.schplaf.org/kf/>

11 décembre 2018



Quelques sources d'inspiration

par ordre d'importance décroissant

- ▶ cours de et interactions avec M. Cori
- ▶ cours d'A. Rozenknop (Paris 13)
- ▶ cours de D. Battistelli (Paris 3), grâce aux notes de C. Riquier (Master 2, Paris 4)

Sources

Forme normale de Chomsky

- Grammaires HC

- Forme normale de Chomsky

- Transformation en FNC

Pour finir

Rappel sur les grammaires hors-contexte

Définition

Une grammaire de type 2 est une grammaire dont les parties gauches des règles contiennent **un unique non-terminal**, indépendamment du contexte dans lequel il apparaît :

$$A \longrightarrow \alpha \text{ avec } \begin{cases} A \in V_N \\ \alpha \in V^* \end{cases}$$

Pour quoi faire ?

Noam Chomsky a défini un type particulier de grammaires hors-contexte (type 2) : les grammaires hors-contexte sous **forme normale**

En TAL, ces grammaires sont très pratiques pour faire de l'analyse syntaxique : elles permettent l'utilisation d'algorithmes efficaces pour cette tâche

Définition

Définition

Une grammaire hors-contexte est sous **Forme Normale de Chomsky** si ses règles ont l'une des deux formes :


$$\left. \begin{array}{l} X \longrightarrow YZ \\ X \longrightarrow a \end{array} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} X \in V_N \\ Y \in V_N \\ Z \in V_N \\ a \in V_T \end{array} \right.$$

On autorise la règle $S \longrightarrow \varepsilon$ si S est l'axiome de la grammaire et s'il n'apparaît jamais dans la partie droite d'une règle



Pour toute grammaire hors-contexte, il existe une grammaire hors-contexte équivalente sous forme normale.

Exercice

 Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} S \longrightarrow aAa & (1) \\ A \longrightarrow Sb & (2) \\ A \longrightarrow bBB & (3) \\ B \longrightarrow abb & (4) \\ B \longrightarrow aC & (5) \\ C \longrightarrow aCA & (6) \end{cases}$$

Exercice



Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} S \longrightarrow aAa & (1) \\ A \longrightarrow Sb & (2) \\ A \longrightarrow bBB & (3) \\ B \longrightarrow abb & (4) \\ B \longrightarrow aC & (5) \\ C \longrightarrow aCA & (6) \end{cases}$$

1. transformer les terminaux en non-terminaux (lorsqu'ils ne sont pas seuls en partie droite) :
 - ▶ ajouter des non-terminaux intermédiaires : X_a et X_b
2. réduire les parties droites :
 - ▶ ajouter des non-terminaux intermédiaires : Y_1 à Y_4

Solution : étape 1

$$P = \begin{cases} S \longrightarrow aAa & (1) \\ A \longrightarrow Sb & (2) \\ A \longrightarrow bBB & (3) \\ B \longrightarrow abb & (4) \\ B \longrightarrow aC & (5) \\ C \longrightarrow aCA & (6) \end{cases}$$

1. Transformer les terminaux en non-terminaux (lorsqu'ils ne sont pas seuls en partie droite) :

► ajouter des non-terminaux intermédiaires : X_a et X_b

$$X_a \longrightarrow a$$

$$X_b \longrightarrow b$$

Solution : résultat de l'étape 1

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \longrightarrow X_a A X_a & (1) \\ A \longrightarrow S X_b & (2) \\ A \longrightarrow X_b B B & (3) \\ B \longrightarrow X_a X_b X_b & (4) \\ B \longrightarrow X_a C & (5) \\ C \longrightarrow X_a C A & (6) \\ X_a \longrightarrow a & (7) \\ X_b \longrightarrow b & (8) \end{array} \right.$$

Solution : étape 2

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \longrightarrow X_a A X_a & (1) \\ A \longrightarrow S X_b & (2) \\ A \longrightarrow X_b B B & (3) \\ B \longrightarrow X_a X_b X_b & (4) \\ B \longrightarrow X_a C & (5) \\ C \longrightarrow X_a C A & (6) \\ X_a \longrightarrow a & (7) \\ X_b \longrightarrow b & (8) \end{array} \right.$$

1. réduire les parties droites :

► ajouter des non-terminaux intermédiaires : Y_1 à Y_4

$$\begin{array}{l} Y_1 \longrightarrow A X_a \\ Y_2 \longrightarrow X_b X_b \\ Y_3 \longrightarrow C A \\ Y_4 \longrightarrow B B \end{array}$$

Solution : résultat de l'étape 2

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \longrightarrow X_a Y_1 & (1) \\ A \longrightarrow S X_b & (2) \\ A \longrightarrow X_b Y_4 & (3) \\ B \longrightarrow X_a Y_2 & (4) \\ B \longrightarrow X_a C & (5) \\ C \longrightarrow X_a Y_3 & (6) \\ X_a \longrightarrow a & (7) \\ X_b \longrightarrow b & (8) \\ Y_1 \longrightarrow A X_a & (9) \\ Y_2 \longrightarrow X_b X_b & (10) \\ Y_3 \longrightarrow C A & (11) \\ Y_4 \longrightarrow B B & (12) \end{array} \right.$$

Multiplication des règles !

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$	
$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$	
$R_3 : SN \longrightarrow Det\ N\ SP$	
$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$	
$R_5 : SV \longrightarrow V$	
$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$	
$R_7 : SV \longrightarrow V\ SN\ SP$	
$L_5 : V \longrightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$	$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$
$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$	$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$
$R_3 : SN \longrightarrow Det\ N\ SP$	
$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$	
$R_5 : SV \longrightarrow V$	
$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$	
$R_7 : SV \longrightarrow V\ SN\ SP$	
$L_5 : V \longrightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$	$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$
$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$	$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$
$R_3 : SN \longrightarrow Det\ N\ SP$	$R_{3.1} : X_1 \longrightarrow N\ SP$
$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$	
$R_5 : SV \longrightarrow V$	
$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$	
$R_7 : SV \longrightarrow V\ SN\ SP$	
$L_5 : V \longrightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$	$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$
$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$	$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$
$R_3 : SN \longrightarrow Det\ N\ SP$	$R_{3.1} : X_1 \longrightarrow N\ SP$
	$R_{3.2} : SN \longrightarrow Det\ X_1$
$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$	
$R_5 : SV \longrightarrow V$	
$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$	
$R_7 : SV \longrightarrow V\ SN\ SP$	
$L_5 : V \longrightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$	$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$
$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$	$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$
$R_3 : SN \longrightarrow Det\ N\ SP$	$R_{3.1} : X_1 \longrightarrow N\ SP$
$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$	$R_{3.2} : SN \longrightarrow Det\ X_1$
$R_5 : SV \longrightarrow V$	$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$
$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$	
$R_7 : SV \longrightarrow V\ SN\ SP$	
$L_5 : V \longrightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$	$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$
$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$	$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$
$R_3 : SN \longrightarrow Det\ N\ SP$	$R_{3.1} : X_1 \longrightarrow N\ SP$
	$R_{3.2} : SN \longrightarrow Det\ X_1$
$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$	$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$
$R_5 : SV \longrightarrow V$	$R_{1.2} : P \longrightarrow SN\ V$
$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$	
$R_7 : SV \longrightarrow V\ SN\ SP$	
$L_5 : V \longrightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$	$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$
$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$	$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$
$R_3 : SN \longrightarrow Det\ N\ SP$	$R_{3.1} : X_1 \longrightarrow N\ SP$
	$R_{3.2} : SN \longrightarrow Det\ X_1$
$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$	$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$
$R_5 : SV \longrightarrow V$	$R_{1.2} : P \longrightarrow SN\ V$
$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$	$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$
$R_7 : SV \longrightarrow V\ SN\ SP$	
$L_5 : V \longrightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$	$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$
$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$	$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$
$R_3 : SN \longrightarrow Det\ N\ SP$	$R_{3.1} : X_1 \longrightarrow N\ SP$
	$R_{3.2} : SN \longrightarrow Det\ X_1$
$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$	$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$
$R_5 : SV \longrightarrow V$	$R_{1.2} : P \longrightarrow SN\ V$
$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$	$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$
$R_7 : SV \longrightarrow V\ SN\ SP$	$R_{7.2} : X_2 \longrightarrow SN\ SP$
$L_5 : V \longrightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$	$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$
$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$	$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$
$R_3 : SN \longrightarrow Det\ N\ SP$	$R_{3.1} : X_1 \longrightarrow N\ SP$
	$R_{3.2} : SN \longrightarrow Det\ X_1$
$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$	$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$
$R_5 : SV \longrightarrow V$	$R_{1.2} : P \longrightarrow SN\ V$
$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$	$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$
$R_7 : SV \longrightarrow V\ SN\ SP$	$R_{7.2} : X_2 \longrightarrow SN\ SP$
	$R_{7.1} : SV \longrightarrow V\ X_2$
$L_5 : V \longrightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$	$R_1 : P \longrightarrow SN\ SV$
$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$	$R_2 : SN \longrightarrow Det\ N$
$R_3 : SN \longrightarrow Det\ N\ SP$	$R_{3.1} : X_1 \longrightarrow N\ SP$
	$R_{3.2} : SN \longrightarrow Det\ X_1$
$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$	$R_4 : SP \longrightarrow Prep\ SN$
$R_5 : SV \longrightarrow V$	$R_{1.2} : P \longrightarrow SN\ V$
$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$	$R_6 : SV \longrightarrow V\ SN$
$R_7 : SV \longrightarrow V\ SN\ SP$	$R_{7.2} : X_2 \longrightarrow SN\ SP$
	$R_{7.1} : SV \longrightarrow V\ X_2$
$L_5 : V \longrightarrow mange$	$L_5 : V \longrightarrow mange$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow \alpha \ t_i \ \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y$
3. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y \ Z \ \alpha$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow \alpha t_i \beta$ (où t_i est un terminal et α et/ou β sont non vides)
 - 1.1 Créer un non-terminal T_i
 - 1.2 Ajouter la règle $T_i \longrightarrow t_i$
 - 1.3 Remplacer la règle $X \longrightarrow \alpha t_i \beta$ par $X \longrightarrow \alpha T_i \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y$
3. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y Z \alpha$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow \alpha \ t_i \ \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y$
3. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y \ Z \ \alpha$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow \alpha \ t_i \ \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y$
 - 2.1 Pour chaque règle $Z \longrightarrow \alpha \ X \ \beta$, ajouter une règle $Z \longrightarrow \alpha \ Y \ \beta$.
 - 2.2 Supprimer $X \longrightarrow Y$.
3. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y \ Z \ \alpha$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow \alpha \ t_i \ \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y$
3. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y \ Z \ \alpha$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow \alpha \ t_i \ \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y$
3. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y \ Z \ \alpha$
 - 3.1 Créer un nouveau non-terminal X_i
 - 3.2 Ajouter la règle $X_i \longrightarrow Z \ \alpha$
 - 3.3 Remplacer la règle $X \longrightarrow Y \ Z \ \alpha$ par $X \longrightarrow Y \ X_i$

Exercice : un peu plus loin dans la FNC



Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} S \longrightarrow AB|aS|a & (1) \\ A \longrightarrow Ab|\varepsilon & (2) \\ B \longrightarrow AS & (3) \end{cases}$$

Exercice : un peu plus loin dans la FNC



Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} S \longrightarrow AB|aS|a & (1) \\ A \longrightarrow Ab|\varepsilon & (2) \\ B \longrightarrow AS & (3) \end{cases}$$

Vous trouverez une solution détaillée ici :

<http://www.linguist.univ-paris-diderot.fr/~amsili/Ens11/pdf/td-li3242-4c.pdf>

Sources

Forme normale de Chomsky

Pour finir

CQFR : Ce Qu'il Faut Retenir
TD



Forme normale de Chomsky :

- ▶ définition
- ▶ transformation d'une grammaire HC en FNC

Exercice 1

Mettez la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} S \longrightarrow aB|bA & (1) \\ A \longrightarrow a|aS|bAA & (2) \\ B \longrightarrow b|bS|aBB & (3) \end{cases}$$

Exercice 2



Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} E \longrightarrow F + E | F & (1) \\ F \longrightarrow T * F | T & (2) \\ T \longrightarrow (E) | a | b & (3) \end{cases}$$

Exercice 3

On considère la phrase suivante :

Le petit garçon regarde la grosse dame avec de grands yeux.

1. donnez les représentations syntaxiques possibles de la phrase
2. déduisez-en une grammaire permettant de prendre en compte l'ambiguïté d'analyse