



Grammaires formelles : Forme normale de Chomsky

Karën Fort

karen.fort@sorbonne-universite.fr / <https://www.schplaf.org/kf/>

11 décembre 2018



Quelques sources d'inspiration

par ordre d'importance décroissant

- ▶ cours de et interactions avec M. Cori
- ▶ cours d'A. Rozenknop (Paris 13)
- ▶ cours de D. Battistelli (Paris 3), grâce aux notes de C. Riquier (Master 2, Paris 4)

Sources

Forme normale de Chomsky

Grammaires HC

Forme normale de Chomsky

Transformation en FNC

Pour finir

Rappel sur les grammaires hors-contexte

Définition

Une grammaire de type 2 est une grammaire dont les parties gauches des règles contiennent **un unique non-terminal**, indépendamment du contexte dans lequel il apparaît :

$$A \longrightarrow \alpha \text{ avec } \begin{cases} A \in V_N \\ \alpha \in V^* \end{cases}$$

Pour quoi faire ?

Noam Chomsky a défini un type particulier de grammaires hors-contexte (type 2) : les grammaires hors-contexte sous **forme normale**

En TAL, ces grammaires sont très pratiques pour faire de l'analyse syntaxique : elles permettent l'utilisation d'algorithmes efficaces pour cette tâche

Définition

Définition

Une grammaire hors-contexte est sous **Forme Normale de Chomsky** si ses règles ont l'une des deux formes :

$$\left. \begin{array}{l} X \longrightarrow YZ \\ X \longrightarrow a \end{array} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} X \in V_N \\ Y \in V_N \\ Z \in V_N \\ a \in V_T \end{array} \right.$$

On autorise la règle $S \longrightarrow \varepsilon$ si S est l'axiome de la grammaire et s'il n'apparaît jamais dans la partie droite d'une règle



Pour toute grammaire hors-contexte, il existe une grammaire hors-contexte équivalente sous forme normale.

Exercice

 Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} S \rightarrow aAa & (1) \\ A \rightarrow Sb & (2) \\ A \rightarrow bBB & (3) \\ B \rightarrow abb & (4) \\ B \rightarrow aC & (5) \\ C \rightarrow aCA & (6) \end{cases}$$

Exercice



Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} S \rightarrow aAa & (1) \\ A \rightarrow Sb & (2) \\ A \rightarrow bBB & (3) \\ B \rightarrow abb & (4) \\ B \rightarrow aC & (5) \\ C \rightarrow aCA & (6) \end{cases}$$

1. transformer les terminaux en non-terminaux (lorsqu'ils ne sont pas seuls en partie droite) :
 - ▶ ajouter des non-terminaux intermédiaires : X_a et X_b
2. réduire les parties droites :
 - ▶ ajouter des non-terminaux intermédiaires : Y_1 à Y_4

Solution : étape 1

$$P = \begin{cases} S \longrightarrow aAa & (1) \\ A \longrightarrow Sb & (2) \\ A \longrightarrow bBB & (3) \\ B \longrightarrow abb & (4) \\ B \longrightarrow aC & (5) \\ C \longrightarrow aCA & (6) \end{cases}$$

1. Transformer les terminaux en non-terminaux (lorsqu'ils ne sont pas seuls en partie droite) :

▶ ajouter des non-terminaux intermédiaires : X_a et X_b

$$X_a \longrightarrow a$$

$$X_b \longrightarrow b$$

Solution : résultat de l'étape 1

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \longrightarrow X_a A X_a & (1) \\ A \longrightarrow S X_b & (2) \\ A \longrightarrow X_b B B & (3) \\ B \longrightarrow X_a X_b X_b & (4) \\ B \longrightarrow X_a C & (5) \\ C \longrightarrow X_a C A & (6) \\ X_a \longrightarrow a & (7) \\ X_b \longrightarrow b & (8) \end{array} \right.$$

Solution : étape 2

$$P = \begin{cases} S \longrightarrow X_a A X_a & (1) \\ A \longrightarrow S X_b & (2) \\ A \longrightarrow X_b B B & (3) \\ B \longrightarrow X_a X_b X_b & (4) \\ B \longrightarrow X_a C & (5) \\ C \longrightarrow X_a C A & (6) \\ X_a \longrightarrow a & (7) \\ X_b \longrightarrow b & (8) \end{cases}$$

1. réduire les parties droites :

- ▶ ajouter des non-terminaux intermédiaires : Y_1 à Y_4

$$\begin{aligned} Y_1 &\longrightarrow A X_a \\ Y_2 &\longrightarrow X_b X_b \\ Y_3 &\longrightarrow C A \\ Y_4 &\longrightarrow B B \end{aligned}$$

Solution : résultat de l'étape 2

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \longrightarrow X_a Y_1 & (1) \\ A \longrightarrow S X_b & (2) \\ A \longrightarrow X_b Y_4 & (3) \\ B \longrightarrow X_a Y_2 & (4) \\ B \longrightarrow X_a C & (5) \\ C \longrightarrow X_a Y_3 & (6) \\ X_a \longrightarrow a & (7) \\ X_b \longrightarrow b & (8) \\ Y_1 \longrightarrow A X_a & (9) \\ Y_2 \longrightarrow X_b X_b & (10) \\ Y_3 \longrightarrow C A & (11) \\ Y_4 \longrightarrow B B & (12) \end{array} \right.$$

Multiplication des règles !

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \rightarrow SN SV$	
$R_2 : SN \rightarrow Det N$	
$R_3 : SN \rightarrow Det N SP$	
$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$	
$R_5 : SV \rightarrow V$	
$R_6 : SV \rightarrow V SN$	
$R_7 : SV \rightarrow V SN SP$	
$L_5 : V \rightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \rightarrow SN SV$	$R_1 : P \rightarrow SN SV$
$R_2 : SN \rightarrow Det N$	$R_2 : SN \rightarrow Det N$
$R_3 : SN \rightarrow Det N SP$	
$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$	
$R_5 : SV \rightarrow V$	
$R_6 : SV \rightarrow V SN$	
$R_7 : SV \rightarrow V SN SP$	
$L_5 : V \rightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \rightarrow SN SV$	$R_1 : P \rightarrow SN SV$
$R_2 : SN \rightarrow Det N$	$R_2 : SN \rightarrow Det N$
$R_3 : SN \rightarrow Det N SP$	$R_{3.1} : X_1 \rightarrow N SP$
$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$	
$R_5 : SV \rightarrow V$	
$R_6 : SV \rightarrow V SN$	
$R_7 : SV \rightarrow V SN SP$	
$L_5 : V \rightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \rightarrow SN SV$	$R_1 : P \rightarrow SN SV$
$R_2 : SN \rightarrow Det N$	$R_2 : SN \rightarrow Det N$
$R_3 : SN \rightarrow Det N SP$	$R_{3.1} : X_1 \rightarrow N SP$
	$R_{3.2} : SN \rightarrow Det X_1$
$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$	
$R_5 : SV \rightarrow V$	
$R_6 : SV \rightarrow V SN$	
$R_7 : SV \rightarrow V SN SP$	
$L_5 : V \rightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \rightarrow SN SV$	$R_1 : P \rightarrow SN SV$
$R_2 : SN \rightarrow Det N$	$R_2 : SN \rightarrow Det N$
$R_3 : SN \rightarrow Det N SP$	$R_{3.1} : X_1 \rightarrow N SP$
$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$	$R_{3.2} : SN \rightarrow Det X_1$
$R_5 : SV \rightarrow V$	$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$
$R_6 : SV \rightarrow V SN$	
$R_7 : SV \rightarrow V SN SP$	
$L_5 : V \rightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \rightarrow SN SV$	$R_1 : P \rightarrow SN SV$
$R_2 : SN \rightarrow Det N$	$R_2 : SN \rightarrow Det N$
$R_3 : SN \rightarrow Det N SP$	$R_{3.1} : X_1 \rightarrow N SP$
	$R_{3.2} : SN \rightarrow Det X_1$
$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$	$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$
$R_5 : SV \rightarrow V$	$R_{1.2} : P \rightarrow SN V$
$R_6 : SV \rightarrow V SN$	
$R_7 : SV \rightarrow V SN SP$	
$L_5 : V \rightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \rightarrow SN SV$	$R_1 : P \rightarrow SN SV$
$R_2 : SN \rightarrow Det N$	$R_2 : SN \rightarrow Det N$
$R_3 : SN \rightarrow Det N SP$	$R_{3.1} : X_1 \rightarrow N SP$
	$R_{3.2} : SN \rightarrow Det X_1$
$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$	$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$
$R_5 : SV \rightarrow V$	$R_{1.2} : P \rightarrow SN V$
$R_6 : SV \rightarrow V SN$	$R_6 : SV \rightarrow V SN$
$R_7 : SV \rightarrow V SN SP$	
$L_5 : V \rightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \rightarrow SN SV$	$R_1 : P \rightarrow SN SV$
$R_2 : SN \rightarrow Det N$	$R_2 : SN \rightarrow Det N$
$R_3 : SN \rightarrow Det N SP$	$R_{3.1} : X_1 \rightarrow N SP$
	$R_{3.2} : SN \rightarrow Det X_1$
$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$	$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$
$R_5 : SV \rightarrow V$	$R_{1.2} : P \rightarrow SN V$
$R_6 : SV \rightarrow V SN$	$R_6 : SV \rightarrow V SN$
$R_7 : SV \rightarrow V SN SP$	$R_{7.2} : X_2 \rightarrow SN SP$
$L_5 : V \rightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \rightarrow SN SV$	$R_1 : P \rightarrow SN SV$
$R_2 : SN \rightarrow Det N$	$R_2 : SN \rightarrow Det N$
$R_3 : SN \rightarrow Det N SP$	$R_{3.1} : X_1 \rightarrow N SP$
	$R_{3.2} : SN \rightarrow Det X_1$
$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$	$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$
$R_5 : SV \rightarrow V$	$R_{1.2} : P \rightarrow SN V$
$R_6 : SV \rightarrow V SN$	$R_6 : SV \rightarrow V SN$
$R_7 : SV \rightarrow V SN SP$	$R_{7.2} : X_2 \rightarrow SN SP$
	$R_{7.1} : SV \rightarrow V X_2$
$L_5 : V \rightarrow mange$	

Autre exemple :

Forme initiale	Forme normale de Chomsky
$R_1 : P \rightarrow SN SV$	$R_1 : P \rightarrow SN SV$
$R_2 : SN \rightarrow Det N$	$R_2 : SN \rightarrow Det N$
$R_3 : SN \rightarrow Det N SP$	$R_{3.1} : X_1 \rightarrow N SP$
	$R_{3.2} : SN \rightarrow Det X_1$
$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$	$R_4 : SP \rightarrow Prep SN$
$R_5 : SV \rightarrow V$	$R_{1.2} : P \rightarrow SN V$
$R_6 : SV \rightarrow V SN$	$R_6 : SV \rightarrow V SN$
$R_7 : SV \rightarrow V SN SP$	$R_{7.2} : X_2 \rightarrow SN SP$
	$R_{7.1} : SV \rightarrow V X_2$
$L_5 : V \rightarrow mange$	$L_5 : V \rightarrow mange$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow \alpha t_i \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y$
3. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y Z \alpha$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \rightarrow \alpha t_i \beta$ (où t_i est un terminal et α et/ou β sont non vides)
 - 1.1 Créer un non-terminal T_i
 - 1.2 Ajouter la règle $T_i \rightarrow t_i$
 - 1.3 Remplacer la règle $X \rightarrow \alpha t_i \beta$ par $X \rightarrow \alpha T_i \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \rightarrow Y$
3. Suppression des règles de type : $X \rightarrow Y Z \alpha$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow \alpha t_i \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y$
3. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y Z \alpha$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow \alpha t_i \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y$
 - 2.1 Pour chaque règle $Z \longrightarrow \alpha X \beta$, ajouter une règle $Z \longrightarrow \alpha Y \beta$.
 - 2.2 Supprimer $X \longrightarrow Y$.
3. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y Z \alpha$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow \alpha t_i \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y$
3. Suppression des règles de type : $X \longrightarrow Y Z \alpha$

Méthode

1. Suppression des règles de type : $X \rightarrow \alpha t_i \beta$
2. Suppression des règles de type : $X \rightarrow Y$
3. Suppression des règles de type : $X \rightarrow Y Z \alpha$
 - 3.1 Créer un nouveau non-terminal X_i
 - 3.2 Ajouter la règle $X_i \rightarrow Z \alpha$
 - 3.3 Remplacer la règle $X \rightarrow Y Z \alpha$ par $X \rightarrow Y X_i$

Exercice : un peu plus loin dans la FNC



Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} S \rightarrow AB|aS|a & (1) \\ A \rightarrow Ab|\varepsilon & (2) \\ B \rightarrow AS & (3) \end{cases}$$

Exercice : un peu plus loin dans la FNC



Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} S \rightarrow AB|aS|a & (1) \\ A \rightarrow Ab|\varepsilon & (2) \\ B \rightarrow AS & (3) \end{cases}$$

Vous trouverez une solution détaillée ici :

<http://www.linguist.univ-paris-diderot.fr/~amsili/Ens11/pdf/td-li3242-4c.pdf>

Sources

Forme normale de Chomsky

Pour finir

CQFR : Ce Qu'il Faut Retenir

TD



Forme normale de Chomsky :

- ▶ définition
- ▶ transformation d'une grammaire HC en FNC

Exercice 1

Mettez la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} S \longrightarrow aB|bA & (1) \\ A \longrightarrow a|aS|bAA & (2) \\ B \longrightarrow b|bS|aBB & (3) \end{cases}$$

Exercice 2



Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$P = \begin{cases} E \rightarrow F + E | F & (1) \\ F \rightarrow T * F | T & (2) \\ T \rightarrow (E) | a | b & (3) \end{cases}$$

Exercice 3

On considère la phrase suivante :

Le petit garçon regarde la grosse dame avec de grands yeux.

1. donnez les représentations syntaxiques possibles de la phrase
2. déduisez-en une grammaire permettant de prendre en compte l'ambiguïté d'analyse