



# Grammaires formelles

## Rappels mathématiques

Karën Fort

karen.fort@sorbonne-universite.fr / <https://www.schplaf.org/kf/>

9 octobre 2020



# Quelques sources d'inspiration

par ordre d'importance décroissant

- ▶ (excellent) cours en ligne de J-F. Perrot (Paris 6), avec son accord : <http://pagesperso-systeme.lip6.fr/Jean-Francois.Perrot/inalco/Automates/Cours1.html>
- ▶ J-F. Perrot (Paris 6), lui-même
- ▶ Mathématiques de base pour les linguistes (P. Goujon) – Hermann, Paris, 1975 (merci B. Habert !)
- ▶ Wikipédia (pour les partitions)

Sources et licence

## Expressions

Expressions arithmétiques

Expressions rationnelles (ou régulières)

Ensembles

Pour finir

# Expressions arithmétiques (en programmation)

ou algébriques (en mathématiques)

Exemples :  $(a + b)^2$  et  $a^2 + 2ab + b^2$

Ce genre de texte, à la syntaxe très stricte, représente d'abord un calcul :

- ▶ pour  $(a + b)^2$ , celui qui consiste en
  - ▶ prendre les valeurs de a et de b
  - ▶ calculer leur somme
  - ▶ calculer le carré de la somme
- ▶ pour  $a^2 + 2ab + b^2$ , celui qui consiste en
  - ▶ prendre la valeur de a, calculer son carré
  - ▶ prendre les valeurs de a et de b, calculer leur produit, multiplier le résultat par 2
  - ▶ ajouter ce résultat au carré de a
  - ▶ prendre la valeur de b, calculer son carré
  - ▶ ajouter ce carré au résultat précédent

## Du processus de calcul au résultat

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  signifie

- ▶ non point que les deux expressions sont identiques,
- ▶ mais que les deux séquences de calcul associées donnent toujours le même résultat

→ les calculs décrits opèrent sur des **nombre**s, par conséquent les valeurs qui leur sont associées sont des nombres

# Expressions rationnelles : exemples



Savez-vous ce que signifient les expressions rationnelles suivantes ?

$(g)r\grave{e}ve$

$[a - z]$

$[0 - 9]$

$[pa]^*$

# Expressions rationnelles



## Analogues aux expressions arithmétiques

- ▶ une expression rationnelle représente d'abord un calcul, mais c'est un calcul sur des ensembles de **mots** et non sur des nombres
- ▶ on s'intéresse au résultat de ce calcul, qui est aussi un ensemble de mots, et en général infini

Il y a un obstacle conceptuel à considérer qu'une expression (texte fini) peut représenter un objet infini

## Vers l'infini... et au-delà

Il existe un nombre infini d'entiers (1, 543, 9 438 734, etc), comment envisager cette infinitude ?

1. En restant toujours "à distance finie", et en constatant qu'on peut toujours trouver un entier plus grand. On parle alors d'**infini en puissance**, parce qu'il n'est jamais réalisé en tant qu'infini : tous les nombres envisagés sont de vrais nombres...
2. En considérant d'un seul coup la collection de tous les entiers, et en tenant des discours sensés comme : la collection de tous les entiers est formée de deux sous-collections (également infinies), celle des entiers pairs et celle des entiers impairs. On parle alors d'**infini en acte**, car on manipule (par la pensée) des infinis dans leur totalité. Cette démarche est nettement plus difficile à accepter : comment puis-je raisonner sur des êtres que je n'ai jamais vus ? Car je n'ai jamais pu contempler la totalité des entiers...

→ les expressions rationnelles relèvent justement de l'**infini en acte**

# Expressions rationnelles : avec l'infini commencent les maths

1. étant donné un langage (régulier), il y a toujours une infinité d'expressions différentes qui le représentent, aucune n'est canonique (sauf pour les langages finis, qu'on peut énumérer)
2. on ne peut pas « constater » que deux expressions sont équivalentes, il faut le **démontrer** → mathématiques

## Formalisme

instrument permettant de manipuler (décrire, calculer, transformer) des objets parfaitement définis, dont l'existence et l'utilité - voire la nécessité - ne font point de doute, mais qui restent **inaccessibles sans instrumentation** (exp. reg., automate, grammaire), parce qu'ils sont infinis... [JF Perrot]

Sources et licence

Expressions

## Ensembles

Définition et notations

Relations

Ensemble vide

Pour finir

# Intuition ?

## Exercice

- ▶ donnez des exemples d'ensembles
- ▶ déduisez-en une définition de ce qu'est un ensemble

## « Ensemble, c'est tout »

Abstraction commune à diverses idées de collections :

- ▶ une **collection** de tableaux
- ▶ une **horde** de zombies
- ▶ une **meute** de chiens
- ▶ une **bande** de voyous
- ▶ une **colonie** de fourmis

→ ensembles, donc **manipulables** par les mêmes opérations

 Notez la finesse terminologique de l'anglais : a herd of cattle, a flock of sheep, a school of porpoises, a pride of lions, a bevey of girls.

## Pas si simple. . .

- ▶ Ensemble des mots d'une langue ? (qu'est-ce qu'un mot ?)
- ▶ Liste des hommes de la génération de Marcel Proust ? (que signifie « être de la même génération que » ?)

### Pour qu'un ensemble soit correctement défini

1. les éléments qui entrent dans sa composition doivent être bien déterminés et décrits **sans ambiguïté**
2. les éléments doivent être **distincts** (pas de doublon)



## Deux types de définitions

1. en **extension** : énumération de tous les éléments de l'ensemble  
{Pierre, Paul, Jacques, Jules, Michel, Nestor, ... }  
ce qui suppose qu'on sache désigner individuellement lesdits éléments
2. en **intension** (ou compréhension) : identification d'une propriété commune à tous les éléments de l'ensemble  
{les membres du groupe qui sont de sexe masculin}

# Parenthèse : sens vs dénotation

Wikipedia, Sens et dénotation, consultée le 28/09/2014

Gottlob Frege (dans *Über Sinn und Bedeutung*, 1892) distingue :

- ▶ **sens** : fonction mentale qui, partant d'une expression linguistique, nous permet de retrouver sa dénotation
- ▶ **dénotation** : objet du monde auquel réfère la proposition

Exemples :

- ▶ *la fille du père Noël* a un sens, mais pas de dénotation
- ▶ *Le vainqueur d'Austerlitz* et *Le vaincu de Waterloo* ont la même dénotation (le Corse pénible), mais pas le même sens

# Conventions de notation

## Pour se faire (bien) comprendre

on désigne :

- ▶ un ensemble par une lettre majuscule ( $A, B, C, E$ , etc.)
- ▶ les éléments d'un ensemble par des minuscules ( $a, b, c$ , etc.)
- ▶ entre accolades la composition d'un ensemble :
  - ▶ soit **en extension**, en séparant chaque élément énuméré par une virgule :  
 $\{ \text{Romain Gary, Émile Ajar, Fosco Sinibaldi, Shatan Bogat} \}$
  - ▶ soit **en intension**, en désignant par un nom arbitraire (par ex.  $e$ ) un élément quelconque de l'ensemble suivi d'une barre verticale, suivie de la propriété commune :  
 $\{ e \mid e \text{ est un des noms de plume de Romain Gary} \}$

# Appartenance

La notion d'ensemble est inséparable de celle d'élément, à laquelle elle est unie par la relation d'**appartenance**.

Un ensemble, c'est un *truc* auquel d'autres *trucs* (les éléments) **appartiennent** ou **n'appartiennent pas**.

## Notation

si  $e$  est l'élément et  $E$  l'ensemble, on écrit :

- ▶  $e \in E$  si  $e$  appartient à  $E$ ,
- ▶  $e \notin E$  dans le cas contraire

## Sous-ensembles, inclusion

Exemple : ensemble  $P$  de « valeurs » phonétiques

$$P = \{ \text{sourd, sonore, dental, vélaire, bilabial, occlusif} \}$$

À partir de  $P$  on peut construire de nouveaux ensembles :

- ▶  $Q = \{ \text{sourd, sonore} \}$
- ▶  $R = \{ \text{dental, vélaire, bilabial} \}$
- ▶  $S = \{ \text{occlusif} \}$
- ▶  $T = \{ \text{sourd, dental, occlusif} \}$

Tout élément de chacun de ces nouveaux ensembles est un élément de  $P$ .

Il existe des éléments de  $P$  qui n'appartiennent pas à  $T$  (lesquels?)

→ on dit que  $T$  est un **sous-ensemble** de  $P$  ou encore qu'il est « inclus » dans  $P$

# Inclusion

## Notation

si  $T$  est un sous-ensemble de  $P$ , il est « inclus » dans  $P$  et on écrit :

$$T \subset P$$

si  $T \subset P$ , alors  $\forall e : e \in T \Rightarrow e \in P$



Que signifie  $E \subseteq F$  ?

## À noter

pour démontrer l'égalité de deux ensembles  $E$  et  $F$ , il suffit de démontrer qu'on a à la fois :

$$E \subset F \text{ et } F \subset E$$

# Inclusion vs appartenance

Ce sont des relations essentiellement différentes :

- ▶ l'une met en rapport deux êtres de **même rang** (deux ensembles)
- ▶ l'autre relie deux éléments de **rangs différents** : dans le vocabulaire des logiciens, l'élément est d'ordre 1 et l'ensemble d'ordre 2.

# Partition

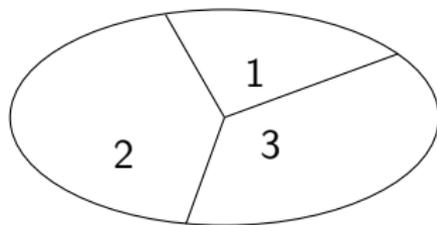
## Définition

un ensemble de sous-ensembles (!) de  $E$  est une partition si :

- ▶ aucune de ces parties n'est vide
- ▶ leur union est égale à  $E$
- ▶ elles sont deux à deux disjointes

L'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  a les partitions suivantes :

- ▶  $\{ \{1\}, \{2\}, \{3\} \}$
- ▶  $\{ \{1, 2\}, \{3\} \}$
- ▶  $\{ \{1, 3\}, \{2\} \}$
- ▶  $\{ \{1\}, \{2, 3\} \}$
- ▶  $\{ \{1, 2, 3\} \}$



# Ensemble vide

## Définition et notation

Ensemble remarquable qui a la propriété de ne posséder aucun élément.

On le note  $\emptyset$



Donnez un exemple d'ensemble vide

## À noter

- ▶ l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble
- ▶ d'un ensemble qui n'est pas l'ensemble vide on peut extraire au moins 2 sous-ensembles : l'ensemble lui-même et l'ensemble vide
- ▶ la partition vide est une partition de l'ensemble vide

Sources et licence

Expressions

Ensembles

**Pour finir**

CQFR : Ce Qu'il Faut Retenir  
TD



- ▶ expressions régulières et infini en acte
- ▶ intension vs extension
- ▶ appartenance vs inclusion

## Exercice : à faire, à rendre, sera noté (ou pas)

### Winter is coming

- ▶ donner deux définitions différentes de l'ensemble des membres de la famille Stark dans Game of Thrones
- ▶ de quel type est l'ensemble des personnes membres à la fois des familles Stark, Lannister et Targaryen ?

## Exercice : à faire, à rendre, sera noté (ou pas)

### Jouer la partition

- ▶ parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont égaux ?
  - ▶  $A = \{Thyrion, Cersei, JonSnow, LordVarys\}$
  - ▶  $B = \{Thyrion, Daenerys, Cersei, Sansa\}$
  - ▶  $C = \{Cersei, LordVarys, JonSnow, Thyrion\}$
  - ▶  $D = \{Cersei, Thyrion, Sansa, Daenerys, Cersei, Sansa, Thyrion\}$
- ▶ soit l'ensemble  $\{Thyrion, Sansa, Daenerys\}$  :
  - ▶ est-ce que  $\{\emptyset, \{Thyrion, Daenerys\}, \{Sansa\}\}$  en est une partition ?
  - ▶ est-ce que  $\{\{Thyrion, Sansa\}, \{Sansa, Daenerys\}\}$  en est une partition ?
  - ▶ est-ce que  $\{\{Thyrion\}, \{Sansa\}\}$  en est une partition ?

## À lire : Histoire de l'infini

http:

[//www4.ac-lille.fr/~malrauxbethune2/hist\\_maths/infini.html](http://www4.ac-lille.fr/~malrauxbethune2/hist_maths/infini.html)